

ანოტაცია

სუპერსრულყოფილი ჯგუფების მინიმალური უნივერსალური ჯვარედინი გაფართოებები

ნიკა ლოგუა

ელ-ფოსტა: nika.logua754@ens.tsu.edu.ge

ილია ვეკუას სახელობის გამოყენებითი მათემატიკის ინსტიტუტი

მათემატიკის დეპარტამენტი, ზუსტ და საბუნებისმეტყველო მეცნიერებათა ფაკულტეტი,

ივანე ჯავახიშვილის სახელობის თბილისის სახელმწიფო უნივერსიტეტი,

უნივერსიტეტის ქ.2, თბილისი 0177, საქართველო

ჰომოლოგიური ალგებრის ფუნდამენტური ფაქტია, რომ მესამე კოჰომოლოგიური ჯგუფი $H^3(G; M)$ კლასიფიცირებს ჯვარედინ გაფართოებებს

$$0 \rightarrow M \rightarrow X \rightarrow Y \rightarrow G \rightarrow 1$$

სადაც $\partial: X \rightarrow Y$ არის ჯვარედინი მოდული, სადაც ანალოგიურად G -ს მოქმედება M -ზე მოცემულია G -მოდულის სტრუქტურით. ამჯერად, თუ მოქმედება ტრივიულია და G სუპერსრულყოფილია, ანუ $H_1(G)$ და $H_2(G)$ ორივე ტრივიალურია, მაშინ $H^3(G; M)$ იზომორფული ხდება $\text{Hom}(H_3(G), M)$ -ის.

თუმცა $H^3(G)$ -ით განსაზღვრული უნივერსალური ჯვარედინი გაფართოება უკვე აღარ არის ერთადერთი. მისთვის არსებობს ინიციალური წარმოდგენა, სადაც Y თავისუფალი ჯგუფია, ხოლო X თავისუფლად (გარკვეული აზრით) არის აგებული Y -სა და $H^3(G)$ -ის უნივერსალური კოციკლით, მაგრამ არსებობს სხვებიც. ჰოლტის კლასიკური ნაშრომიდან გამომდინარეობს, რომ თუ G სასრულია, მაშინ არსებობს წარმოდგენა, სადაც Y სასრულია და ასევე X სასრული აბელური ჯგუფია. ფაქტობრივად, X -ად შეიძლება ავიღოთ ინდუცირებული G -მოდული $H_3(G)[G]$.

ამის შემდეგ ბუნებრივად ისმება კითხვა, არსებობს თუ არა უმცირესი წარმოდგენა, ანუ ისეთი, რომელიც ნებისმიერი სხვა წარმოდგენის ფაქტორჯგუფია. მართლაც, ჩვენ ვნახავთ, რომ ნებისმიერი ისეთი Y -ქვეჯგუფისთვის $Z \subset X$ ისეთი რომ $M \cap Z = 0$ რომელიც შესაძლებელია შემდგომი დაყვანა $X/Z \rightarrow Y/\partial(Z)$ -ზე, შესაბამისად, თუ უმცირესი წარმომადგენელი არსებობს, მაშინ არსებობს უდიდესი Z პირობით $M \cap Z = 0$.

ჩვენი მთავარი შედეგი ის არის, რომ ასეთი უდიდესი Z შეიძლება არც არსებობდეს. კერძოდ, ჩვენ ვაჩვენებთ, რომ როდესაც G ტოლია მათიეს M_{11} ჯგუფის, არსებობს ორი განსხვავებული მაქსიმალური ქვემოდული $Z \subset H_3(G)[G]$ პირობით $H_3(G) \cap Z = 0$. როგორც შედეგი, ჩვენ გამოგვაქვს დასკვნა, რომ ზოგად შემთხვევაში არ არსებობს უმცირესი ზემოთ მოყვანილი აზრით წარმოდგენა უნივერსალური ჯვარედინი გაფართოებისთვის.